a) • $\emptyset$ je otvorená, lebo výrok $\forall x \in \emptyset\ \exists r > 0\ \ B(x,r) \subset \emptyset$ je automaticky splnený, keďže neexistuje žiaden prvok z prázdnej množiny pre ktorý by sme museli nájsť r. $\Rightarrow \mathrm{Int}\,\emptyset = \emptyset$.

• Podobne $\partial\emptyset = \emptyset$, lebo $\forall x \in \emptyset\ \forall r > 0\ \ B(x,r) \cap \emptyset \neq \emptyset$ & $B(x,r) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$. Ono to je vtipné, lebo $B(x,r) \cap \emptyset = \emptyset$ pre každé $x \in \mathbb{R}$ a každé $r > 0$, no je pravda, že pre každé x z prázdnej množiny už $B(x,r) \cap \emptyset \neq \emptyset$. Ide o prázdnu podmienku, inak naturmolovaná hovorí, že nech si zoberieme ľubovoľné x z prázdnej množiny tak spĺňa ... (čo môže byť čokoľvek napríklad $B(x,r) \cap \emptyset \neq \emptyset$).

• $\mathbb{R} = \mathbb{R} \setminus \emptyset$ a o prázdnej množine vieme, že je otvorená $\Rightarrow$ Podľa vety z prednášky $\mathbb{R}$ ako doplnok otvorenej je uzavretá. Rovnako ako doplnok uzavretej je aj otvorená.

b) Nech $M \subseteq \mathbb{R}$ neprázdna, ktorá nie je celé $\mathbb{R}$ a nech je otvorená. Potom ukážeme, že už nie je uzavretá.

$$\text{Nech } x \in \overset{\text{neprázdna}}{M} \text{ a } y \in \mathbb{R} \setminus \overset{M \neq \mathbb{R}}{M}.$$ Nech $y < x$ inak by sme postupovali podobne. Nech

$a = \inf\{z \in M;\ y < z\}$. Potom pre a platí:

- Ukážeme, že $a \in \partial M$ & $a \notin M$

- $a \notin M$ ak by $a \in M$, potom existuje $r > 0$, že $\xrightarrow{M \text{ je otvorená}}$

  $B(a,r) \subseteq M$, všimnime si, že $y \notin B(a,r)$ a teda

  $y < a - \frac{r}{2}$. Zároveň $a - \frac{r}{2} < a = \inf\{z \in M, y < z\}$,

  čo je však spor, lebo $a - \frac{r}{2} \in \{z \in M, y < z\}$.

- Chceme, že $a \in \partial M$, stačí už len, že $\forall r > 0$

  $B(a,r) \cap M \neq \emptyset$ (Už vieme, že $B(a,r) \cap \mathbb{R} \setminus M \neq \emptyset$, lebo

  $a \in B(a,r) \cap \mathbb{R} \setminus M$). Stačí si uvedomiť, čo

  znamená infimum množiny. Nech $r > 0$, potom

  $\exists\, c \in \{z \in M, y < z\} : a \leq c < a + r \Rightarrow c \in B(a,r) \cap M$

  a teda $B(a,r) \cap M \neq \emptyset$.